Algunas reflexiones en torno al concepto de acumulación en la enseñanza del Cálculo Integral

Daniel Steven Moran Pizarro*
Rubén Darío Santaella Forero**

10 de septiembre de 2019

Resumen

Integrar es acumular. En el presente artículo motivamos la idea de enseñanza del Cálculo Integral vía la acción de acumulación, la cual permanece latente en el desarrollo histórico-epistemológico del concepto de integral.

Los problemas en educación universitaria, en particular de la enseñanza del Cálculo Integral no es un problema nuevo. La pérdida de estos cursos se manifiesta en insatisfacción y posterior deserción de los estudiantes en los programas universitarios. Generalmente en los cursos de ingeniería, el estudiante recibe una serie de técnicas de aplicación, pero no comprende en el fondo lo que está haciendo, viéndose limitado en la aplicación de estos conceptos.

Este artículo pretende ser una reflexión en torno a este problema, destacando el concepto propio de la acumulación como pilar fundamental en la enseñanza de la integral, por encima de los procesos netamente algorítmicos.

Palabras clave: Epistemología de las Matemáticas, Integral, Cuadraturas, Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

Abstract

Integrate is accumulation. In this paper we motivate the idea of teaching Integral Calculus via the action of accumulation, which remains latent in the historical-epistemological development of the concept of integral.

For several years the problems in the learning of Differential and Integral Calculus have been discussed. The loss of these courses is manifested in dissatisfaction and subsequent desertion of students in university programs. Usually in engineering courses, the student receives a number of application techniques, but does not understand basically what is he/she doing, be constrained the application of these concepts.

This paper aims to be a reflection on this problem, highlighting the concept of accumulation as a fundamental pillar in the teaching of the integral, above the algorithmic processes.

Keywords: Epistemology of Mathematics, Integral, Quadratures, Advanced Mathematical Thinking (AMT).

*Docente Tiempo Completo Ocasional, Universidad de Pamplona. correo: daniel.moran@unipamplona.edu.co

**Docente Tiempo Completo Ocasional, Universidad de Pamplona. correo: dmatematicas@unipamplona.edu.co

1. Introducción

Muchos investigadores han conducido estudios sobre el establecimiento del concepto moderno de integral matemática. Por ejemplo, en artículos como [6], [12] y [13] muestran la íntima relación entre objeto y proceso, y cómo esto puede ser aplicado a la comprensión de las nociones matemáticas. Estudios más especializados sobre la evolución del concepto de integral pueden encontrarse en [4], [8] y [9]. Una de las conclusiones donde muchos autores convergen es evitar que prime el mecanicismo frente a la compresibilidad, en donde una desarticulación de los conceptos es evidente. Con ello se logra que *a posteriori* el estudiante no comprenda los siguientes conceptos, y más aún sus aplicaciones en la Física e Ingeniería: se le presenta al estudiante un problema en un contexto determinado y difícilmente logra entrever ese vínculo existente entre las matemáticas con la experiencia y realidad.

Un hecho que preocupa es que los procesos de acumulación son subyacentes a la naturaleza humana. Por tanto, destacamos la idea de que se hace necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares.

En un análisis retrospectivo del concepto, vemos que la noción de integral aparece inicialmente como un problema geométrico de acumulación, y es sorprendente que dicho concepto se pierda y se nuble por la cantidad de reglas algorítmicas que los estudiantes aprenden en sus cursos de Cálculo.

El presente artículo pretende ser una reflexión en torno a ello, donde se hará un pequeño barrido histórico donde se destaca la acumulación como el ente primario en el aprendizaje del concepto de integral.

2. Algunas consideraciones históricas

Analizar la epistemología[1] en el contexto mismo de la historia de las matemáticas, implica necesariamente hablar de los antiguos griegos, quienes formularon 3 problemas que muchos siglos después se demostraron que eran irresolubles con regla no graduada y compás:

- Dado un cubo de volumen V, encontrar un cubo que tenga el doble del volumen. Esto es, encontrar un cubo cuyo volumen sea $2V$.
- Dado un ángulo θ, encontrar su tercera parte. Esto es, calcular $\theta/3$.
- Dado un círculo C, encontrar un cuadrado equivalente en área.

Se puede observar que estos problemas están íntimamente ligados a la construcción de ciertos números que no son posibles mediante regla y compás (números trascendentes). Por ejemplo, el tercer problema es equivalente a la construcción del número irracional $\sqrt{\pi}$, el cual no es construible con regla y compás. Muchos matemáticos estuvieron interesados en resolver estos problemas planteados en el siglo V a.C., pero no lograron resolverlos. Sin embargo, a pesar de estos intentos fallidos, las respuestas dadas sirvieron como arsenal fértil para el desarrollo de muchas ramas de las matemáticas. Esas respuestas parciales marcaron, en muchos aspectos, el derrotero de la evolución

[1] Se toma como referencia uno de los trabajos de los autores (Moran, Jaramillo y Sigarreta, 2018).

matemática por más de 25 siglos [11]. Particularmente nos enfocaremos en el último problema (conocido como la cuadratura del círculo).

Euclides (Siglo V, a.C) no logró encontrar el cuadrado equivalente al círculo. Sin embargo, mediante su idea de aplicaciones de áreas logró encontrar un cuadrado equivalente a una figura rectilínea.

Teorema 1 (Proposición II,14. Elementos de Euclides)**.** *Sea* Σ *una figura rectilínea. Encontrar un cuadrado equivalente a* Σ*.*

Demostración. La idea básica de la prueba de Euclides es la siguiente:

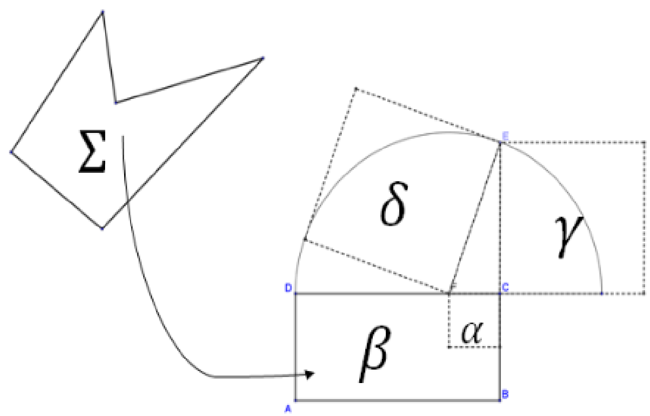


Figura 1: Proposición II,14 (Elementos de Euclides)

En su libro I, Euclides muestra cómo encontrar un rectángulo equivalente a una figura rectilínea. Sea β un rectángulo equivalente a Σ. Sea γ el cuadrado sobre la media proporcional entre los segmentos DC y BC (el mismo que determina a β). Afirmamos que $\Sigma = \gamma$. En efecto, por la proposición II,7; Euclides muestra que $\beta + \alpha = \delta$ (donde α es el cuadrado construido sobre los puntos donde se ha seccionado al segmento DC), y por el teorema de Pitágoras $\alpha + \gamma = \delta$. Entonces $\beta + \alpha = \alpha + \gamma$; y por tanto, $\Sigma = \beta = \gamma$. □

La respuesta de Euclides puede considerarse plausible, porque si tenemos un polígono de 4 lados (cuadrado), y duplicamos sus lados (octógono, 8 lados), y así sucesivamente; este polígono tiende a ser un círculo. En términos modernos, decimos esto:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \mathcal{C}$$

donde P_n es un polígono de n lados.

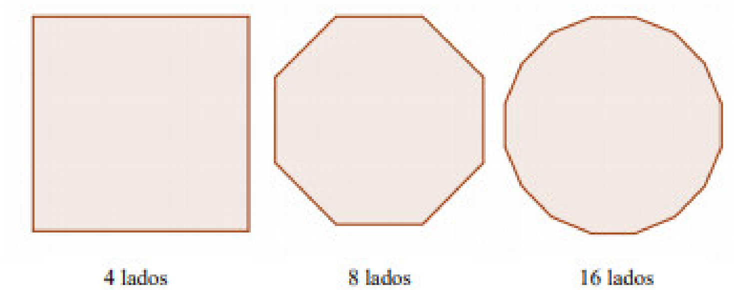


Figura 2: Figuras rectilíneas que tienden al círculo

Es decir que una figura cualquiera (modernamente, establecemos que sea una figura cerrada por una curva simple) puede *agotarse* en términos de figuras rectilíneas. Ese fue el principio del método exhaustivo de Arquímedes:

Sea una región no rectilínea R

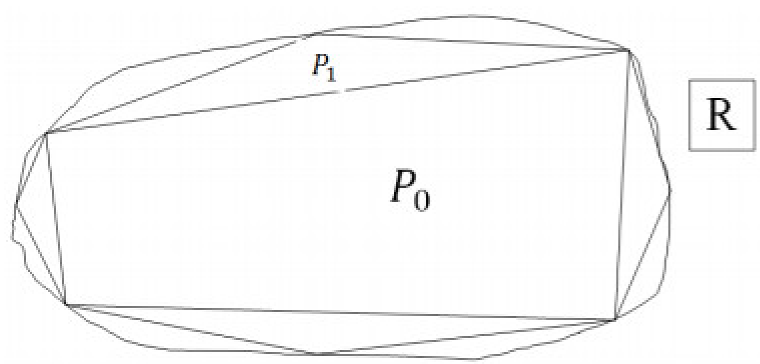


Figura 3: Método exhaustivo aplicado a una figura en general

Se define una sucesión de polígonos $P_0, P_1, ..., P_n$, donde $\{P_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente. Se define una sucesión de diferencias como sigue: $M_0 = R - P_0$, $M_1 = R - P_1$,..., $M_n = R - P_n$, que es una sucesión estrictamente decreciente [2], donde se tiene que:

$$M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n$$

que corresponde al principio de Eudoxo (proposición X,1) de los *Elementos*.

Tenemos que:

Teorema 2. *Si*

$$\left(M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n\right) \quad \textit{entonces} \quad \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+ \textit{ tal que } M_n < \epsilon$$
$$(\{P_n\} \to P) \quad \textit{entonces} \quad \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{Z}^+ \textit{ tal que } P - P_n < \epsilon$$

Entonces $R = P$.

[2] la desigualdad entre los términos consecutivos de las diferencias M es consecuencia directa de la elección de los polígonos P_n.

Demostración.

- Si suponemos $R > P$, entonces $R - P > 0$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $R - P_n < R - P$, de lo que se tiene que $P_n > P$. (Contradicción).
- Si suponemos $P > R$, entonces $P - R > 0$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $P - P_n < P - R$, de lo que se tiene que $P_n > R$.(Contradicción).

  Por tanto, $R = P$.

□

En este sentido, Arquímedes obtuvo varios resultados geométricos interesantes. Uno de ellos fue el de la *cuadratura de la parábola*. Arquímedes postuló que el área de un segmento parabólico era igual a $\frac{4}{3}$ del triángulo inscrito en la parábola. Para ello, consideró dos sucesiones: una de polígonos inscritos en la parábola y una de polígonos circunscritos en la misma.

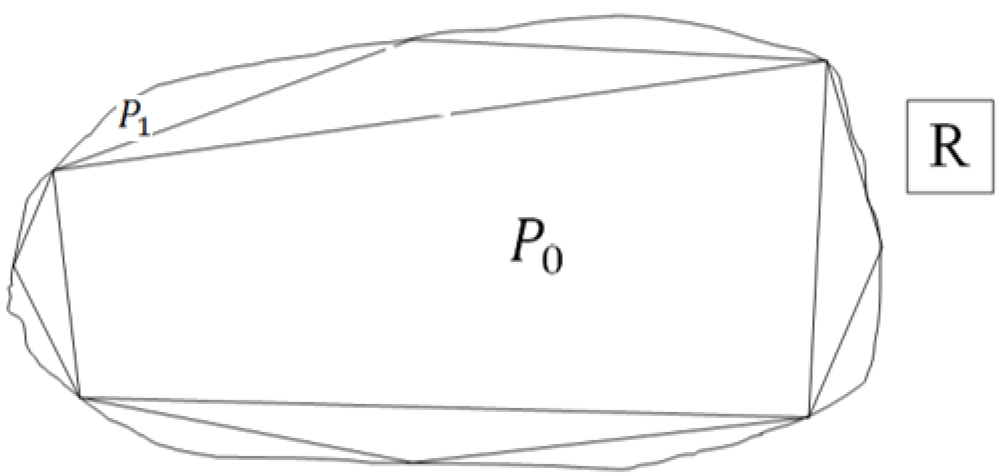


Figura 4: La cuadratura de la parábola. Método exhaustivo

Sea ABC la parábola, donde B es el vértice. A continuación, Arquímedes inscribe el ΔABC donde O es el punto medio de AC. Sea F el punto medio de AO. Se traza una perpendicular que intersecta la parábola en Z, y se construye el triángulo ΔAZB y análogamente con OC, creando la siguiente sucesión [3]

$$\begin{aligned} P_0 &= \Delta ABC \\ P_1 &= P_0 + \Delta AZB + \Delta BEC \end{aligned}$$

De la misma forma para $P_2, ..., P_n$. Para esto se divide AC en cuatro partes iguales y se trazan FZ, GE paralelas a OB. Teniendo en cuenta algunas propiedades de la parábola y usando algunas proposiciones del libro I de los *Elementos* de Euclides, se puede demostrar que:

$$\Delta ABC = 4(\Delta AZB + \Delta BEC)$$

Por tanto, $\mathcal{A}(P_1) = \mathcal{A}(P_0) + \frac{1}{4}\mathcal{A}(P_0)$. A través de razonamientos análogos se demuestra que:

[3] Aquí, denotamos a P_0 al polígono y $\mathcal{A}(P_0)$ el área del polígono.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(P_2) &= \mathcal{A}(P_0) + \frac{1}{4}\mathcal{A}(P_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathcal{A}(P_0) \\
&\vdots \\
\mathcal{A}(P_n) &= \mathcal{A}(P_0) + \frac{1}{4}\mathcal{A}(P_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathcal{A}(P_0) + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathcal{A}(P_0)
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$\mathcal{A}(P_n) = \mathcal{A}(P_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k \mathcal{A}(P_0)$$

Ahora Arquímedes se apoya en el siguiente resultado:

$$\left(\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = \frac{4}{1}\right) \text{ entonces } A + B + C + D + E = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$$

Y como la relación entre el polígono que se inscribe y el siguiente es de 4 a 1, y si denominamos a S como el área del segmento parabólico, concluye que:

$$S = \frac{4}{3}\mathcal{A}(P_0) - \frac{1}{3}\frac{\mathcal{A}(P_0)}{4^n}$$

Pero como el sustraendo puede ser tan pequeño como se quiera, Arquímedes concluye que:

$$S = \frac{4}{3}P_0$$

Después de algunos cálculos, Arquímedes demuestra que el área de un segmento parábolico es igual a $\frac{4}{3}$ del área del triángulo inscrito en la misma, y como Euclides ya logró la cuadratura de cualquier figura rectilínea, Arquímedes ha encontrado la cuadratura de la parábola.

3. El proceso de acumulación transversal al concepto de integral

De acuerdo a lo dicho, entender las técnicas de integración como procesos aislados no permite entrever lo que verdaderamente está de fondo en la idea de integración. La frase cliché de que "la integral es el área bajo la curva" está lejos de la idea general de lo que es la integral matemática. Una *representación* geométrica de la integral sí es el área bajo la curva, pero ello no recoge propiamente la idea de integral matemática. La idea fundamental del proceso de integración es la **acumulación**.

3.1. Cálculo de áreas como un proceso de acumulación

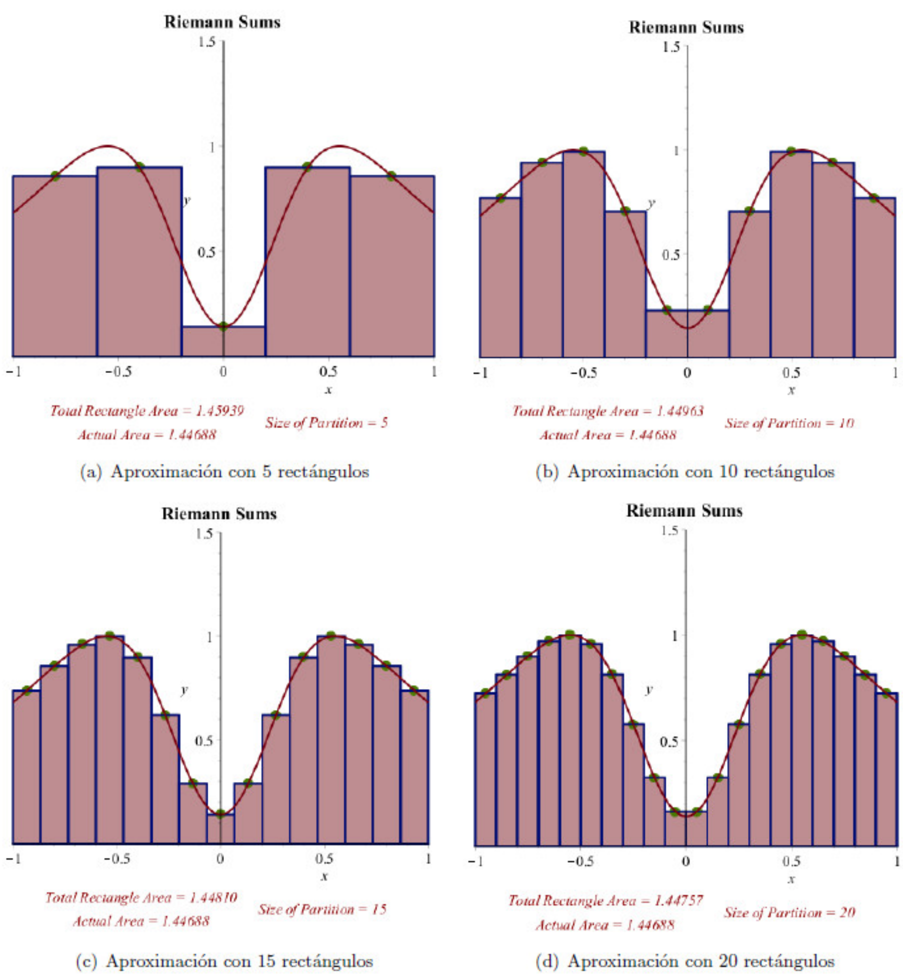
El área es una de las aplicaciones que permitieron llevar a la formalización del proceso de integral, puesto que el área es en sí un proceso de acumulación. Sea f una función que está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

existe, decimos que f es Riemann-integrable en $[a, b]$. Además, $\int_a^b f(x)dx$, denominada **integral definida** (o integral de Riemann) de f de a hacia b, entonces está dada por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

donde $\overline{x_i}$ es un punto muestra en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1}\ :\ 0 < i \le n-1\}$. Las siguiente gráficas pretenden mostrar lo anterior:



(a) Aproximación con 5 rectángulos

(b) Aproximación con 10 rectángulos

(c) Aproximación con 15 rectángulos

(d) Aproximación con 20 rectángulos

Figura 5: Aproximaciones de Riemann del punto medio para la función $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+\frac{1}{3}}\right)$

Cuando tomamos el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos una **función de acumulación**. Sea f no negativa en un intervalo $[a, b]$, se define la función de acumulación como una función $F(x)$ tal que:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

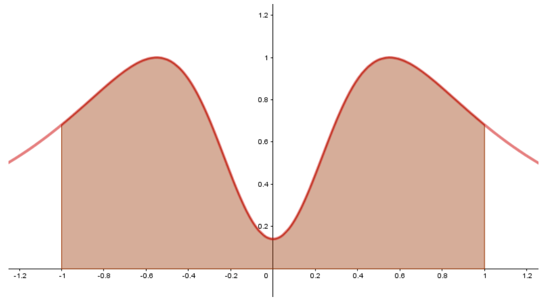


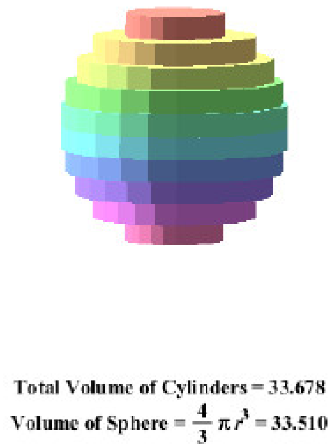
Figura 6: Función de acumulación desde $a = -1$ hasta $x = 1$ de la función sen $\left(\dfrac{1}{x^2 + \frac{1}{3}}\right)$

3.2. Cálculo de volúmenes como un proceso de acumulación

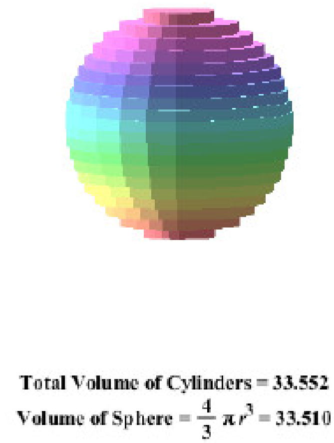
El cálculo de volúmenes también es un proceso de acumulación. Una función continua $f(x)$ puede hacerse rotar con respecto al eje x o y, describiendo un sólido de revolución. Ahora, ¿qué hacemos para calcular el volumen? Imaginamos (al estilo de Cavalieri) que un volumen está constituido por rebanadas muy delgadas (de grosor Δx), donde:

$$\Delta V \approx A_{\text{base}}.\Delta x$$

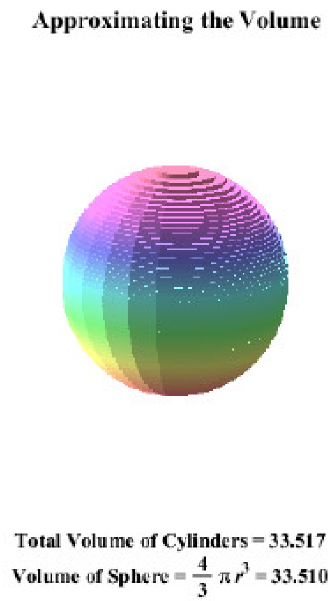
Es conocido que el volumen de una esfera es $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Las siguientes imágenes muestran procesos de aproximación.



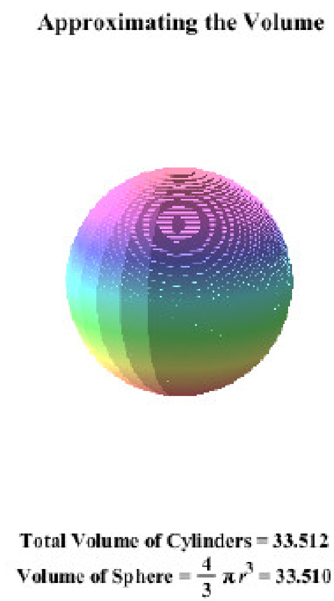
(a) Aproximación con 10 discos



(b) Aproximación con 20 discos



(c) Aproximación con 50 discos



(d) Aproximación con 100 discos

Figura 7: Esfera vista como una acumulación de discos

Cuando pasamos al límite, el grosor tiende a ser "infinitamente pequeño". Así, se dan las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \Delta V &\Longrightarrow V \\ \approx &\Longrightarrow = \\ \Delta x &\Longrightarrow dx \end{aligned}$$

Obteniendo que:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

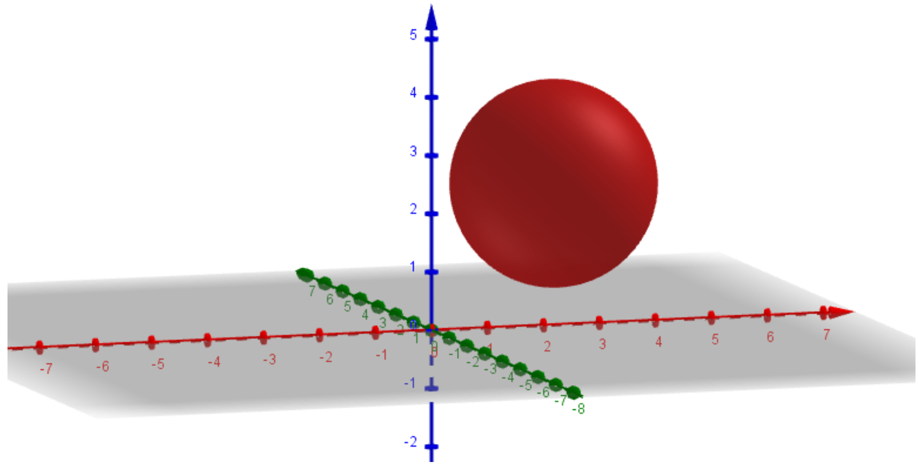


Figura 8: Esfera como un proceso de acumulación de infinitos discos

Una generalización del Cálculo de Volúmenes se obtiene por medio de las integrales dobles al definir el volumen acotado por una región Ω y la superficie $z = f(x, y)$ como:

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dA$$

y la forma de calcular dichas integrales, mediante integrales iteradas, no es otra cosa que el espíritu de Cavalieri en el Cálculo de volúmenes.

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

donde $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$ barren la región de integración Ω. La integral interna (con respecto de y) está "sumando todas las líneas" para obtener el área (Ominus linae!) y los otros límites de integración estarían sumando todas las áreas, para obtener un volumen.

4. Algunas consideraciones finales

Los procesos de integración han aparecido inicialmente como procesos de acumulación, y es sorprendente que esta parte sea ignorada en la práctica docente universitaria. La naturaleza del concepto de integral hunde sus raíces en procesos geométricos que, en la práctica, se ven escondidos por procesos netamente algorítmicos.

Una de las críticas la vemos, por ejemplo, con las sumas de Riemann. En muchos libros de texto se define la integral del Riemann en un intervalo $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|P\| \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ y $\|P\| = \text{máx}\{x_{i+1} - x_i,\ 1 \leq i \leq n\}$.

En los textos usuales de Cálculo emplean fórmulas para hallar la partición, donde toman a $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, una partición regular.

Dichas particiones regulares no tienen explicación alguna, simplemente son convenientes para poder luego hacer una suma infinita -igualmente conveniente- del tipo $\sum_{i=1}^{n} i$ o en su defecto $\sum_{i=1}^{n} i^2$. Dichas Sumas de Riemann no permiten ver que en efecto, lo importante es la acumulación *independiente* de la partición que se tome, no netamente el proceso de sumación como fórmulas dadas.

Por ejemplo, supongamos que tenemos funciones del tipo

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{o} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donde dichas particiones anteriores no irán a servir nunca, puesto que no contamos con fórmulas para dichas sumas. El proceso de acumulación es superior a pensar solamente en el proceso mecánico de sumación vía fórmulas de sumatorias, y podemos tomar particiones de una forma conveniente. Por ejemplo, por técnicas de integración es conocido que

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

De la observación: Sean $a > 0$ y $b > 0$. Si $a < b$ entonces $ab < b^2$ y $a^2 < ab$ se tiene que $\sqrt{ab} < b$ y $a < \sqrt{ab}$, se sigue que $a < \sqrt{ab} < b$. Así podríamos considerar la partición conveniente $\overline{x_i} = \sqrt{x_i x_{i-1}}$, puesto que $x_{i-1} < \sqrt{x_i x_{i-1}} < x_i$. Luego, al tomar la suma tendríamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\sqrt{x_i x_{i-1}})(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i x_{i-1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{x_i x_{i-1}} - \frac{x_{i-1}}{x_i x_{i-1}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right] \\
&= \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-2}} - \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \\
&= \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

Un razonamiento similar basado en el concepto de acumulación nos conduciría a la solución de la integral $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}$. Sabemos que por los métodos usuales de integración, el valor de esta integral es igual a $2(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.

El hecho que

$$x_{i-1} < \left(\frac{\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}}}{2}\right)^2 < x_i$$

Implica que

$$\sqrt{x_{i-1}} < \frac{\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}}}{2} < \sqrt{x_i}$$

Tendríamos entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{x_i}+\sqrt{x_{i-1}}}{2}\right)^2}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{\frac{\sqrt{x_i}+\sqrt{x_{i-1}}}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2\frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}}} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) \\
&= 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})
\end{aligned}$$

Agradecimientos

Los autores de manera muy sincera queremos agradecer al profesor Juan Carlos López, de la Universidad de Pamplona; por dar una semilla de reflexión constante en nuestro camino de ser docentes, haber despertado en nosotros la inquietud y brindarnos pautas para la escritura de este artículo.

Referencias

[1] Bernoulli, J., *Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium.*, Johannis Bernoulli Opera Omnia, 385-558. 1691.

[2] Dhombres, J., *Mesure et continu. Épistémologie et histoire*, Nantes: CEDIC, 1980.

[3] Grattan-Guiness, I., *From the calculus to set theory 1630-1910: An Introductory History*, Princeton University Press, 1980.

[4] Hawkins, T., *Lebesgue's Theory of Integration*, New York: Chelsea Publishing Company, 1970.

[5] Heath, T., *The thirteen books of the Elements*, New York: Dover, 1956.

[6] Lesh, R. and Landau, M., *Adquisition of Mathematical Concepts and Processes*, New York: Academic Press, 1983.

[7] Moran, D. Jaramillo, C. Sigarreta, J, *Etapa superestructural de la integral*, Logos Ciencia y Tecnología, v.10 fasc.2 p.135 - 152 , 2018.

[8] Michel, A., *Constitution de la Théorie Moderne de L'Intégration*, París: Librairie Philosophique J. Vrin, 1992.

[9] Pier, J.P., *Histoire de l'intégration*, París: Masson S.A., 1996.

[10] Piaget, J., *Genetic Epistemology*, New York: W. W. Norton, 1970.

[11] Recalde, L., *Las raíces históricas de la integral de Lebesgue*, Matemáticas: enseñanza universitaria, 103-127., 2007.

[12] Sfard, A., *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics 22, pags. 1-36, 1991.

[13] Skemp, R. R., *The Psychology of Learning Mathematics*, England: Penguin Books, 1971.

[14] Zalamea, F., *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2009.