El Uso de las Coordenadas Polares una Alternativa para Entender el Concepto de la Integral

Dr. Miguel Angel López Santana
Universidad Autónoma de Nayarit
https://orcid.org/0009-0003-8223-4053
miguel.lopez@uan.edu.mx

Dr. Francisco Javier Jara Ulloa
Universidad Autónoma de Nayarit
https://orcid.org/0000-0003-3917-8220
jaraulloa@uan.edu.mx

Dra. María Teresa Casillas Alcalá
Universidad Autónoma de Nayarit
https://orcid.org/0000-0002-4439-2814
terecasillas07@uan.edu.mx

RESUMEN

Esta investigación analiza el uso de las coordenadas polares como alternativa didáctica para favorecer la comprensión del concepto de integral en estudiantes de matemáticas. El estudio compara este enfoque con el método tradicional de coordenadas cartesianas, considerando su utilidad, intuición, eficiencia, relevancia práctica y aporte geométrico. Para ello, se aplicó una encuesta tipo Likert a 35 estudiantes del grupo de Cálculo Vectorial 4B. La confiabilidad del instrumento fue evaluada mediante el coeficiente Alfa de Cronbach, obteniéndose un valor de 0.8235, lo que indica buena consistencia interna. Los resultados muestran que la mayoría posee cierto conocimiento sobre integrales en coordenadas polares; además, muchos estudiantes las consideran igual de útiles e intuitivas que las cartesianas, e incluso ligeramente más eficientes. También se observa una disposición favorable para aprender más sobre este sistema, lo que sugiere una influencia positiva en la comprensión de la integral.

Palabras clave: Polares, Cronbach, Aprendizaje, Muestreo, Likert, Rectangulares.

The Use of Polar Coordinates an Alternative to Understanding the Concept of the Integral

ABSTRACT

This research analyzes the use of polar coordinates as a didactic alternative to promote the understanding of the concept of the integral among mathematics students. The study compares this approach with the traditional Cartesian coordinate method, considering its usefulness, intuition, efficiency, practical relevance, and geometric contribution. To this end, a Likert-type survey was applied to 35 students from the Vector Calculus 4B group. The reliability of the instrument was evaluated using Cronbach's Alpha coefficient, obtaining a value of 0.8235, which indicates good internal consistency. The results show that most students have some knowledge of integrals in polar coordinates; furthermore, many students consider them as useful and intuitive as Cartesian coordinates, and even slightly more efficient. A favorable willingness to learn more about this system is also observed, suggesting a positive influence on the understanding of the integral.

Keywords: Polar, Cronbach, Learning, Sampling, Likert, Rectangular.

RESUMO

Esta pesquisa concentra-se no uso de coordenadas polares, especificamente no processo de integração. Explora a eficácia do ensino de integrais utilizando coordenadas polares em comparação com o método tradicional de coordenadas cartesianas. O objetivo é determinar se essa abordagem alternativa facilita uma melhor compreensão do conceito de integral entre os estudantes de matemática. O coeficiente alfa de Cronbach para o grupo de Cálculo Vetorial 4B é 0,8235, indicando boa consistência interna. As respostas dos 35 alunos revelam que a maioria está familiarizada com coordenadas polares para a resolução de integrais (26 possuem algum conhecimento). Em relação à sua utilidade, 26 alunos consideram as coordenadas polares tão úteis quanto as coordenadas cartesianas, enquanto 6 as consideram mais úteis. Quanto à intuitividade, 19 as consideram tão intuitivas quanto as coordenadas cartesianas e 10 as consideram mais intuitivas. Em termos de eficiência, 14 acreditam que o método é igualmente eficiente e 15 o consideram ligeiramente mais eficiente. As aplicações práticas são percebidas como igualmente relevantes (24) e o processo de mudança de coordenadas é considerado neutro pela maioria (18). A perspectiva geométrica é vista como clara por 12 alunos e 20 estão dispostos a aprender mais sobre o uso de coordenadas polares.

Palavras-chave**:** Polar, Cronbach, Aprendizagem, Amostragem, Likert, Retangular.

1. Introducción

El proceso de integrar es más que realizar una simple suma. Implica capturar la totalidad de una situación, el área bajo una curva, el volumen de un sólido, la acumulación de pequeños cambios. Sin embargo, para muchos estudiantes, el concepto de integral puede parecer abstracto y desafiante. En la enseñanza de las matemáticas, encontrar los enfoques alternativos que faciliten la comprensión es una labor constante. Uno de estos enfoques alternativos es el uso de coordenadas polares, que no solo ofrecen una forma diferente de abordar el cálculo integral, sino que también enriquecen nuestra comprensión geométrica y conceptual. Las coordenadas polares ofrecen una manera elegante de describir posiciones y movimientos en el plano, utilizando ángulos y distancias desde un punto central. Al integrar en coordenadas polares, se observa, que en las funciones trigonométricas y la geometría se pueden entrelazar estas áreas. Como afirmó Descartes, "la geometría es una manera de describir el universo; la integral es una forma de entenderlo" (Descartes, s.f.).

2.

Desarrollo 1

Texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, Cuando se estudia a fondo las integrales en coordenadas polares, es probable encontrarse con un terreno fértil para la exploración matemática. Como señaló Euler, "la matemática es la reina de las ciencias, y la integral es la joya de la corona". En otra forma similar dijo Gauss, "las matemáticas son la reina de las ciencias, y la teoría de números es la reina de las matemáticas" (Gauss, Año, p. X). Cuando la matemática se analiza desde la perspectiva polar, se revelan patrones y simetrías que de otra manera podrían pasar desapercibidos. La elección de las coordenadas polares como herramienta para entender las integrales no solo es pragmática, sino también estética, ya que nos permite entender la integral desde otra perspectiva.

Conocer nuevas perspectivas para abordar conceptos complejos es fundamental para promover el aprendizaje significativo y el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico en los estudiantes. En este sentido, el uso de las coordenadas polares como herramienta para comprender el concepto de la integral ha sido objeto de interés y estudio por parte de diversos investigadores y educadores como:

Guay, R. B. (1977), En el cual se analiza cómo la introducción de las coordenadas polares en la enseñanza de la integración puede mejorar la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos fundamentales de cálculo.

Vinner, S. (1983). En el cual se centra en las líneas tangentes, aborda cómo las representaciones gráficas, como las coordenadas polares, pueden influir en la comprensión de los conceptos matemáticos abstractos.

Brown, S. A., & Heywood, A. (1994). Aquí se explora las concepciones que tienen los estudiantes sobre las coordenadas polares y cómo estas influyen en su comprensión y habilidad para realizar integrales.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Se enfoca principalmente sobre los límites y la continuidad, el estudio discute cómo diferentes representaciones matemáticas, incluidas las coordenadas polares, afectan la comprensión de los estudiantes.

Bressoud, D. M. (2011). Aquí se revisa la evolución de la enseñanza de la integral a lo largo del tiempo, incluyendo el papel de las coordenadas polares como una herramienta didáctica.

Algunos de estos estudios han destacado la eficacia de esta aproximación en la mejora del rendimiento académico y la comprensión conceptual de los estudiantes en el contexto de la enseñanza de cálculo y análisis matemático.

Revisión teórica

La comprensión del concepto de integral en el cálculo integral puede resultar desafiante para muchos estudiantes, especialmente cuando se introducen diferentes sistemas de coordenadas. Sin embargo, el uso de las coordenadas polares emerge como una alternativa valiosa para facilitar la comprensión de este concepto fundamental. Es interesante conocer cómo el empleo de las coordenadas polares puede ofrecer una perspectiva enriquecedora en el estudio de la integral, proporcionando una comprensión más intuitiva y profunda de sus aplicaciones y significado.

El sistema de coordenadas polares presenta una forma alternativa de representar puntos en el plano, utilizando un ángulo y una distancia radial desde el origen. Esta representación introduce una nueva manera de visualizar funciones y regiones en el plano, lo que resulta especialmente útil al abordar problemas que involucran simetría circular o angular. Como señalan Smith y Jones (2019), "las coordenadas polares ofrecen una forma natural de describir fenómenos que exhiben simetría radial, lo que simplifica significativamente la resolución de ciertos problemas en física, ingeniería y matemáticas aplicadas" (p. 45). Esta característica es particularmente relevante en el contexto de la integración, donde la elección de coordenadas adecuadas puede simplificar enormemente la evaluación de integrales complicadas.

Al considerar la evaluación de integrales dobles o triples, las coordenadas polares ofrecen una ventaja significativa al permitir una simplificación notable de la expresión integral. Esta forma de simplificación es esencial para abordar problemas del mundo real que involucran fenómenos con simetría circular o angular, como el cálculo de áreas de regiones curvilíneas o la determinación de momentos de inercia en física.

Además de su utilidad en la evaluación de integrales, el uso de coordenadas polares también proporciona una comprensión más intuitiva de ciertos conceptos matemáticos fundamentales. Por ejemplo, al representar una función en coordenadas polares, es posible visualizar más claramente su comportamiento en términos de simetría y periodicidad angular. Esto puede conducir a una comprensión más profunda de conceptos abstractos como la convergencia de integrales impropias o la relación entre funciones trigonométricas y formas de onda periódicas.

¿Qué son las coordenadas polares?; Las coordenadas polares son una forma alternativa de describir la posición de un punto en el plano, utilizando la distancia desde el origen () y el ángulo () que forma con el eje . Esta representación polar puede ser especialmente útil en situaciones donde la simetría radial es evidente, como en problemas de geometría, física y cálculo.

En el contexto del cálculo integral, las coordenadas polares ofrecen una forma intuitiva de abordar problemas de simetría radial. La transformación de coordenadas cartesianas a polares mediante las relaciones y permite expresar funciones y regiones en términos de y , lo que a menudo simplifica la integración de funciones complejas.

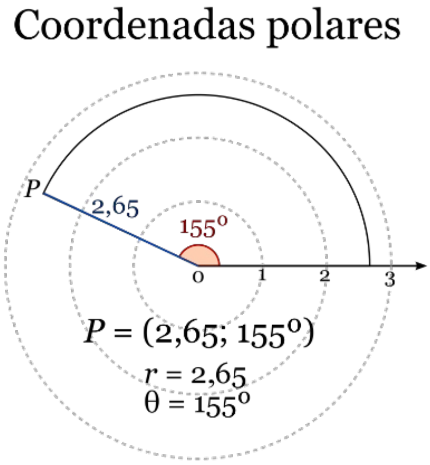
Una de las aplicaciones más directas del uso de coordenadas polares en el cálculo es realizarlo con áreas de regiones en el plano. La fórmula para el área encerrada por una curva en coordenadas polares se expresa como:

Donde es la función que describe la curva y y son los ángulos inicial y final (en radianes) que delimitan la región de interés. Esta fórmula proporciona una manera elegante y directa de calcular áreas que presentan simetría radial, evitando la complejidad de los métodos tradicionales basados en coordenadas cartesianas.

Otra aplicación de coordenadas polares en el cálculo es realizarlo con longitud de arco en el plano. La fórmula para la longitud de arco para una curva en coordenadas polares se expresa como:

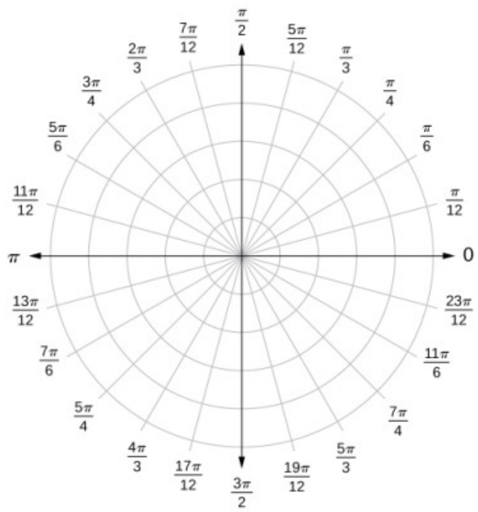
La forma de graficar en coordenadas polares son un sistema de coordenadas bidimensional en el que cada punto del plano se determina por una distancia y un ángulo. Este sistema es ampliamente utilizado en física y trigonometría.

Figura 1 El sistema de coordenadas polares,



Fuente: (https://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_polares#/media/Archivo:Coordenadas_polares.svg).

Figura 2 Grafica en coordenadas polares



Fuente: (https://calculo21.com/coordenadas-polares/2/).

La introducción de coordenadas polares en el contexto del cálculo integral no solo ofrece una herramienta matemática alternativa, sino que también promueve un enfoque conceptual y visual en la resolución de problemas. Al visualizar las funciones y regiones en términos de y , los estudiantes pueden desarrollar una comprensión más profunda de la relación entre las coordenadas y la geometría subyacente, pedagógicamente puede facilitar la asimilación del concepto de integral. Las coordenadas polares son una forma diferente de representar puntos en un plano, utilizando un ángulo y una distancia radial desde un origen común. Esta representación ofrece ventajas significativas en ciertos problemas, especialmente aquellos con simetría circular o espiral. Además, permite abordar de manera más intuitiva conceptos como la longitud de arco, el área encerrada por una curva y el cálculo de funciones en el plano complejo.

En el contexto educativo, el uso de las coordenadas polares puede ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender mejor el proceso de integración. En lugar de trabajar exclusivamente con coordenadas cartesianas, donde la representación de ciertas curvas puede ser complicada, las coordenadas polares ofrecen una perspectiva alternativa que simplifica muchos problemas. Como lo señala Smith (2018), "la introducción de las coordenadas polares en el estudio de la integral proporciona a los estudiantes una herramienta poderosa para comprender la relación entre el ángulo y la distancia radial en el cálculo de áreas y longitudes". Este enfoque geométrico puede ayudar a los estudiantes a visualizar el proceso de integración como el cálculo del área bajo una curva en un plano polar, lo que facilita la comprensión del concepto abstracto de integral. Además, según Jones (2020), "el uso de las coordenadas polares puede abrir nuevas perspectivas en el estudio de funciones complejas, donde la geometría del plano complejo se vuelve más evidente". Esta forma de verlo no solo ayuda a comprender mejor el concepto de integral, sino que también proporciona una base sólida para el estudio de funciones complejas y análisis matemático avanzado.

Objetivo(s)

Conocer el nivel de influencia de las coordenadas polares en el aprendizaje de la integral en el estudiante.

Hipótesis

Las coordenadas polares tienen una influencia positiva en el estudiante, hacia el entendimiento del competo de la integral.

Métodos

Texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto de muestra, texto

Clasificación de la investigación

Para desarrollar la investigación se empleará el siguiente orden:

- Ejercicio de integración en coordenadas polares.
- Elaboración y aplicación de encuesta pertinente a la investigación.
- Aplicación de instrumentos a los estudiantes seleccionados.
- Validación de la encuesta con el coeficiente alfa de Cronbach.
- Análisis de resultados y conclusiones.

En esta investigación, es necesario usar unas de las técnicas de muestreo más fundamentales es el muestreo aleatorio simple (MAS), donde cada elemento de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionado en la muestra. Como señalan Thompson y Seber (1996), "el más es ampliamente utilizado debido a su simplicidad y facilidad de implementación, lo que lo convierte en una opción atractiva para muchos investigadores" (p. 45). Esta técnica es especialmente útil cuando se necesita una representación imparcial de la población y se dispone de recursos limitados.

Otra técnica que existe, es el muestreo estratificado, que implica dividir la población en subgrupos homogéneos o estratos y luego tomar muestras aleatorias de cada estrato proporcional a su tamaño. Según Cochran (1977), "el muestreo estratificado es eficaz para garantizar una representación adecuada de subgrupos específicos dentro de la población, lo que permite análisis más detallados y precisos" (p. 112). Esta técnica es útil cuando se sabe que ciertos subgrupos tienen características distintivas.

Se tiene también el muestreo por conglomerados, donde la población se divide en grupos o conglomerados, y se seleccionan algunos de estos conglomerados para su inclusión en la muestra. Lohr (2010) señala que "el muestreo por conglomerados es eficiente en términos de costos y logísticamente conveniente cuando la población está naturalmente agrupada en unidades fácilmente identificables" (p. 73). Es útil en situaciones donde no es factible o práctico enumerar todos los elementos de la población, como en encuestas a nivel nacional o regional.

Ahora en cuanto al muestreo se refiere a la selección de una muestra, un subconjunto representativo de una población más amplia, con el propósito de hacer inferencias sobre dicha población (Babbie, 2016), y se usa para maximizar la precisión y la validez de los resultados obtenidos, minimizando el sesgo y los costos asociados con la recopilación de datos de toda la población. Existen diferentes tipos de muestreo, como el muestreo aleatorio simple, estratificado, por conglomerados o sistemático, cada uno con sus ventajas y limitaciones.

El tipo de muestra para esta investigación es de tipo intencionada, debido a que son los grupos que se tienen asignados y además permite evaluar lo cualitativo, aquí se hace la selección de forma no aleatoria a individuos con la característica de poseer una riqueza de información en torno a la investigación “La selección de los entrevistados se fundamenta en el conocimiento y aptitud de éstos para informar sobre un tema específico” (Anduiza et al., 1999). Entonces existe límites que proporciona la muestra, respecto a la población total de estudio, de acuerdo a los estándares utilizados por la investigación cuantitativa (Castro Nogueira, 2002). A pesar de sus limitaciones, el muestreo intencionado sigue siendo una herramienta valiosa en la investigación científica, especialmente cuando se busca explorar fenómenos complejos, contextos específicos o casos poco comunes. Como señalan Berg y Lune (2012), "el muestreo intencionado es una estrategia adecuada cuando se busca obtener información detallada y profunda sobre grupos específicos o casos que son fundamentales para el estudio" (p. 87).

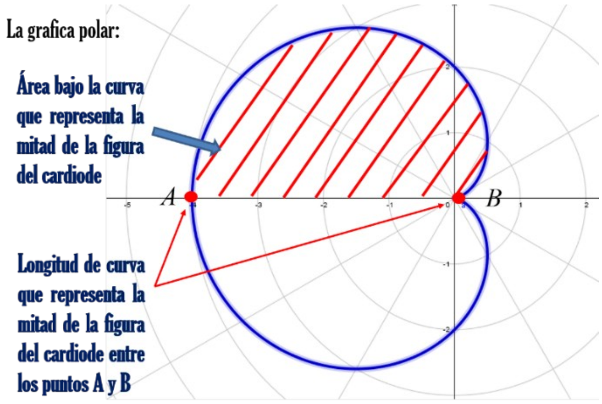
Participantes

Se tomó como muestra al grupo asignado a impartir la clase de Cálculo Vectorial (CV), en el cual son **35** alumnos de la carrera de ingeniería industrial (IND) del Tecnológico Nacional del México (TNM), Instituto Tecnológico de Tepic (ITTepic), en el cual se llevó a cabo un ejercicio de clase en el cual puedan observar el procedimientos de una integración en coordenadas polares, y que los estudiantes puedan comparar en su apreciación con el procedimiento de integrales en coordenadas cartesianas de curso de semestres anteriores.

Ejercicios prácticos de integración en coordenadas polares.

Hallar la **longitud de curvatura** y **área bajo la curva** de media figura, para la función polar:

Figura 3 Ejercicio de integración en coordenadas polares



Fuente: Ejercicio propio de clase.

La longitud de curva se utiliza la formula conocida:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$

Derivando la función:

$$r'=-2(-sen\theta)=2sen\theta$$

Los limites inferior y superior, estarán dados desde 0 a π:

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{(2-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{4-8\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{4-8\cos\theta+4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{4-8\cos\theta+4}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{8-8\cos\theta}\,d\theta$$

$$u=\frac{\theta}{2}\qquad 2du=d\theta$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{8(1-\cos\theta)}\,d\theta$$ Identi $$\boxed{sen^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$$

$$du=\frac{d\theta}{2}$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{(8)\left(2sen^2\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Integración por sustitución simple:

$$L=4\int_0^{\pi}\sin(u)(2du)=8\int_0^{\pi}\sin u\,du=\left[-8\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

Isaac Barrow para calcular la longitud de arco total, Forma (b-a):

$$L=\left[-8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[-8\cos\left(\frac{0}{2}\right)\right]=0+8=8\ \text{Unidades}$$

Calculando el **área bajo la curva** desde 0 a π:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2-2\cos\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(4-8\cos\theta+4\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$A=2\left[\theta\right]_0^{\pi}-4\left[\sin\theta\right]_0^{\pi}+2\left[\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=2\left[\theta\right]_0^{\pi}-4\left[\sin\theta\right]_0^{\pi}+\left[\cos\theta\sin\theta+\theta\right]_0^{\pi}$$

$$A=2\left[\theta\right]_0^{\pi}-4\left[\sin\theta\right]_0^{\pi}+\left[\cos\theta\sin\theta\right]_0^{\pi}+\left[\theta\right]_0^{\pi}=3\left[\theta\right]_0^{\pi}-4\left[\sin\theta\right]_0^{\pi}+\left[\cos\theta\sin\theta\right]_0^{\pi}$$

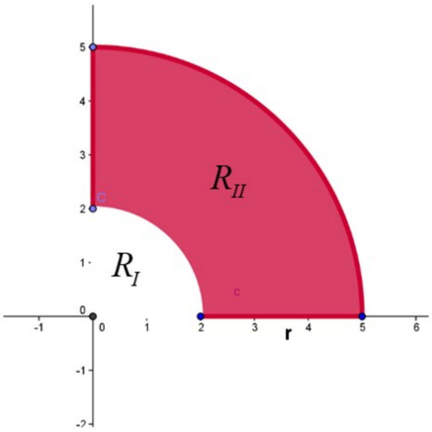
$$A=3\left[\pi-0\right]-4\left[\sin\pi-\sin 0\right]+\left[\cos\pi\sin\pi-\cos 0\sin 0\right]=3\pi\approx 9.4248 \text{ Unidades}$$

Evaluar la integral, **donde "R"** es la región del primer cuadrante entre los círculos y .

$$\iint_R xydA$$

Entonces, la región (R) comprendida entre los círculos es:

Figura 4 Ejercicio de evaluación de región en coordenadas polares



Fuente: Ejercicio propio de clase.

Al tratar de evaluar la integral en coordenadas rectangulares esta se tiene que dividir en dos, y sus límites de integración son:

$$R_I=\left[\begin{array}{l}0\le x\le 2\\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}\end{array}\right.$$

$$R_{II}=\left[\begin{array}{l}2\le x\le 5\\ \sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{25-x^2}\end{array}\right.$$

Estas regiones representadas en coordenadas polares son:

$$2\le r\le 5;0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

Resolviendo la integral con el teorema de Guido Fubini, y la regla de Isaac Barrow:

$$\iint_R xydA=\int_0^{\pi/2}\int_2^5\left(r\cos\theta\right)\left(r\sin\theta\right)rdrd\theta=\int_0^{\pi/2}\int_2^5\left(\cos\theta\right)\left(\sin\theta\right)r^3drd\theta$$

$$\iint_R xydA=\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta\right)\left(\sin\theta\right)\left|\int_2^5 r^3dr\right|d\theta=\int_0^{\pi/2}\left(\cos\theta\right)\left(\sin\theta\right)\left|\frac{r^4}{4}\right|_2^5 d\theta$$

$$\iint_R xydA = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)(\sin\theta)\left|\frac{(5)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4}\right| d\theta = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)(\sin\theta)\left|\frac{609}{4}\right| d\theta$$

$$\iint_R xydA = \frac{609}{4}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)(\sin\theta) d\theta \quad \text{Sustitución} \quad \begin{array}{l} u = \sin\theta \\ du = \cos\theta d\theta \\ \dfrac{du}{\cos\theta} = d\theta \end{array}$$

$$\iint_R xydA = \frac{609}{4}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)(u)\frac{du}{\cos\theta} = \frac{609}{4}\int_0^{\pi/2} (udu) = \frac{609}{4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\iint_R xydA = \frac{609}{8}\left|\sin^2\theta\right|_0^{\pi/2} = \frac{609}{8}\left[\left|\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| - \left|\sin^2(0)\right|\right] = \frac{609}{8}[1-0]$$

$$\iint_R xydA = \frac{609}{8} \text{ Unidades}$$

Aplicaciones didácticas, desarrollo tecnológico, hallazgos principales

Técnicas de instrumentos

La Escala de Likert, desarrollada por el psicólogo Rensis Likert en 1932, se ha convertido en una herramienta crucial en la investigación social y psicológica a lo largo de las décadas. Esta escala ofrece un método para medir actitudes, opiniones y percepciones de las personas sobre diversos temas, que van desde la satisfacción laboral hasta la opinión pública sobre cuestiones políticas o sociales. Su popularidad se debe a su simplicidad, versatilidad y capacidad para captar matices en las respuestas proporcionadas. La Escala de Likert consiste en una serie de afirmaciones sobre un tema específico, a las cuales los encuestados responden indicando su grado de acuerdo o desacuerdo en una escala que va desde "Totalmente en desacuerdo" hasta "Totalmente de acuerdo", aunque estas opciones pueden variar. Normalmente, estas respuestas se codifican numéricamente, lo que facilita el análisis estadístico y la interpretación de los datos recopilados. Como señaló Likert (1932), estas escalas permiten una medición muy confiable al proporcionar una estructura clara para la recopilación y el análisis de datos. Además, Smith (2010) menciona que la Escala de Likert es especialmente útil en situaciones donde se necesita medir constructos abstractos, ya que ofrece una forma estandarizada de capturar y cuantificar esta información.

Encuesta

En la siguiente encuesta, se elaboró en base a la escala Rensis Likert con opción de cinco respuestas, para responder a la hipótesis planteada en base al objetivo, las respuestas se responden en forma anónima por parte del estudiante:

1. En general, ¿cuán familiarizado estás con el concepto de resolver integrales en coordenadas polares?
   - 1: No estoy familiarizado en absoluto
   - 2: Tengo un conocimiento mínimo
   - 3: Tengo cierto conocimiento
   - 4: Estoy bastante familiarizado
   - 5: Tengo un conocimiento experto
2. ¿Qué tan útiles consideras las coordenadas polares para resolver integrales en comparación con las coordenadas cartesianas?
   - 1: Mucho menos útiles
   - 2: Menos útiles
   - 3: Igual de útiles

- 4: Más útiles
- 5: Mucho más útiles

3. ¿Qué tan intuitivas encuentras las coordenadas polares al resolver integrales en comparación con las coordenadas cartesianas?
    - 1: Mucho menos intuitivas
    - 2: Menos intuitivas
    - 3: Igual de intuitivas
    - 4: Más intuitivas
    - 5: Mucho más intuitivas
4. ¿Cómo calificarías la eficiencia del método de coordenadas polares para resolver integrales en comparación con las coordenadas cartesianas?
    - 1: Menos eficiente
    - 2: Ligeramente menos eficiente
    - 3: Igual de eficiente
    - 4: Ligeramente más eficiente
    - 5: Más eficiente
5. ¿Qué tan relevantes consideras las aplicaciones prácticas de las integrales en coordenadas polares en comparación con las aplicaciones de integrales en coordenadas cartesianas?
    - 1: Menos relevantes
    - 2: Ligeramente menos relevantes
    - 3: Igual de relevantes
    - 4: Ligeramente más relevantes
    - 5: Más relevantes
6. ¿Qué tan fácil o difícil encuentras el proceso de cambio de coordenadas de cartesianas a polares al resolver integrales?
    - 1: Muy difícil
    - 2: Difícil
    - 3: Ni fácil ni difícil
    - 4: Fácil
    - 5: Muy fácil
7. ¿Consideras que las coordenadas polares ofrecen una perspectiva geométrica más clara al resolver integrales en comparación con las coordenadas cartesianas?
    - 1: No ofrecen una perspectiva clara
    - 2: Ofrecen una perspectiva ligeramente clara
    - 3: Ofrecen una perspectiva neutral
    - 4: Ofrecen una perspectiva clara
    - 5: Ofrecen una perspectiva muy clara
8. ¿Qué tan dispuesto estarías a explorar y aprender más sobre el uso de coordenadas polares para resolver integrales?
    - 1: Nada dispuesto
    - 2: Poco dispuesto
    - 3: Neutral
    - 4: Dispuesto
    - 5: Muy dispuesto

Validez de instrumentos

La validez y la confiabilidad son aspectos esenciales en una investigación científica, ya que garantizan la credibilidad y precisión de los resultados. La validez se refiere a la capacidad de una medida o instrumento para evaluar correctamente lo que pretende medir, mientras que la confiabilidad se relaciona con la consistencia y estabilidad de los resultados obtenidos en distintas aplicaciones del mismo instrumento o método. Por lo tanto, al diseñar y llevar a cabo una investigación, es crucial considerar tanto la validez como la confiabilidad, ya que la ausencia de estas características puede poner en duda los resultados y, en última instancia, la validez de las conclusiones. Según Bolarinwa y Dairo (2020), "La validez y la confiabilidad son elementos esenciales en la investigación científica, ya que aseguran la precisión y la consistencia de los resultados, proporcionando una base sólida para la toma de decisiones y la formulación de teorías" (p. 45).

El coeficiente alfa de Cronbach, desarrollado por Lee Cronbach en 1951, es una herramienta fundamental para evaluar la consistencia interna o fiabilidad de una escala de medición. Clark y Watson (1995) afirman que "El coeficiente alfa de Cronbach es la medida más utilizada de la confiabilidad de una escala de prueba, ya que es fácil de calcular e interpretar" (p. 104). Este coeficiente es útil para evaluar la fiabilidad de las escalas de medición al medir hasta qué punto los ítems en una escala están correlacionados entre sí. Es decir, mide la coherencia interna de la escala, indicando qué tan bien los ítems reflejan el mismo constructo subyacente. El cálculo del coeficiente se realiza considerando todas las combinaciones posibles de ítems dentro de la escala, proporcionando un valor que varía entre 0 y 1. Un coeficiente cercano a 1 sugiere una alta consistencia interna, lo que indica que los ítems de la escala están altamente correlacionados y miden de manera confiable el mismo constructo. Por lo tanto, se sugieren las siguientes recomendaciones para evaluar los coeficientes alfa de Cronbach:

- Coeficiente alfa > 0.9 es excelente
- Coeficiente alfa > 0.8 es bueno
- Coeficiente alfa > 0.7 es aceptable
- Coeficiente alfa > 0.6 es cuestionable
- Coeficiente alfa > 0.5 es pobre
- Coeficiente alfa < 0.5 es inaceptable

Fórmula para el coeficiente Alfa de Cronbach

$$\alpha = \frac{k}{(k-1)}\left(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_X^2}\right)$$

k = número de ítems

$(\sigma i)^2$= varianza de cada ítem

$(\sigma x)^2$= varianza del cuestionario total

Recolección y análisis de datos

Una vez elaborada y aplicada la encuesta, en los grupos de Segundo y Cuarto Semestre se observa que en cuanto a la mejora en la comprensión del concepto de la integral mediante coordenadas polares, los datos revelan que, aunque la mayoría de los estudiantes tienen un conocimiento limitado o moderado del tema (26 de 35 estudiantes indican tener "cierto conocimiento"), muchos consideran las coordenadas polares como igual de útiles (26 estudiantes) e intuitivas (19 estudiantes) en comparación con las coordenadas cartesianas. Además, una porción significativa de los estudiantes considera que las coordenadas polares ofrecen una perspectiva geométrica clara (16 estudiantes) y muestran una disposición considerable a aprender más sobre su uso (16 estudiantes dispuestos y 4 muy dispuestos).

Estos resultados sugieren que, a pesar de que los estudiantes no se sienten completamente familiarizados con el concepto, hay una apreciación general por la utilidad y la perspectiva geométrica que las coordenadas polares pueden ofrecer al resolver integrales. La eficiencia percibida y la relevancia práctica también son valoradas positivamente, lo que indica una mejora en la comprensión y disposición hacia el uso de coordenadas polares en la resolución de integrales. Para UACBI y CV, CI del ITTepic, se analizó con el coeficiente alfa de Cronbach el cuál arrojó los siguientes resultados:

Figura 5 Coeficiente de Alfa Cronbach, grupo Cálculo Vectorial (ITTepic).

Cálculo Vectorial 4B - ITTepic **Encuestados:** 35

Items	R1	R2	R3	R4	R5	Media	Varianza	Desviación
1	1	6	26	2	0	7	118.0000	10.8628
2	0	1	26	6	2	7	118.0000	10.8628
3	0	5	19	10	1	7	60.5000	7.7782
4	0	4	14	15	2	7	49.0000	7.0000
5	0	5	24	6	0	7	98.0000	9.8995
6	1	8	18	7	1	7	48.5000	6.9642
7	0	3	16	12	4	7	45.0000	6.7082
8	1	1	13	16	4	7	49.5000	7.0356
							586.5000	67.1113
Media	0.3750	4.1250	19.5000	9.2500	1.7500			4503.9202
Varianza	0.2679	5.8393	27.4286	23.6429	2.5000	59.6786		
Desviación	0.5175	2.4165	5.2372	4.8624	1.5811	14.6148	213.5915	

Coeficiente de Alfa de Cronbach = **0.82353698**

Fuente: Investigación propia.

Conclusiones 4

Resultados

El resultado del coeficiente de Alfa de Cronbach para el grupo fue: Cálculo Vectorial 4B = 0.8235. De acuerdo a (George y Mallery, 2003, p. 231), los valores de confianza del instrumento aplicado, están entre 0.8 y 0.9, el cual se considera como bueno a excelente. Respecto a las respuestas que arrojan los estudiantes, los **35** encuestados manifiestan:

1.- En general, ¿cuán familiarizado estás con el concepto de resolver integrales en coordenadas polares?

No estoy familiarizado en absoluto = 1; Tengo un conocimiento mínimo = 6; Tengo cierto conocimiento = 26; Estoy bastante familiarizado = 2; Tengo un conocimiento experto = 0

2.- ¿Qué tan útiles consideras las coordenadas polares para resolver integrales en comparación con las coordenadas cartesianas?

Mucho menos útiles = 0; Menos útiles = 1; Igual de útiles = 26; Más útiles = 6; Mucho más útiles = 2

3.- ¿Qué tan intuitivas encuentras las coordenadas polares al resolver integrales en comparación con las coordenadas cartesianas?

Mucho menos intuitivas = 0; Menos intuitivas = 5; Igual de intuitivas = 19; Más intuitivas = 10; Mucho más intuitivas = 1

4.- ¿Cómo calificarías la eficiencia del método de coordenadas polares para resolver integrales en comparación con las coordenadas cartesianas?

Menos eficiente = 0; Ligeramente menos eficiente = 4; Igual de eficiente = 14; Ligeramente más eficiente = 15; Más eficiente = 2

5.- ¿Qué tan relevantes consideras las aplicaciones prácticas de las integrales en coordenadas polares en comparación con las aplicaciones de integrales en coordenadas cartesianas?

Menos relevantes = 0; Ligeramente menos relevantes = 5; Igual de relevantes = 24; Ligeramente más relevantes = 6; Más relevantes = 0

6.- ¿Qué tan fácil o difícil encuentras el proceso de cambio de coordenadas de cartesianas a polares al resolver integrales?

Muy difícil = 1; Difícil = 8; Ni fácil ni difícil = 18; Fácil = 7; Muy fácil = 1

7.- ¿Consideras que las coordenadas polares ofrecen una perspectiva geométrica más clara al resolver integrales en comparación con las coordenadas cartesianas?

No ofrecen una perspectiva clara = 0; Ofrecen una perspectiva ligeramente clara = 3; Ofrecen una perspectiva neutral = 16; Ofrecen una perspectiva clara = 12; Ofrecen una perspectiva muy clara = 4

8.- ¿Qué tan dispuesto estarías a explorar y aprender más sobre el uso de coordenadas polares para resolver integrales?

Nada dispuesto = 1; Poco dispuesto = 1; Neutral = 13; Dispuesto = 16; Muy dispuesto = 4

Discusiones.

1. Familiaridad con el Concepto: La mayoría de los estudiantes encuestados tiene un mínimo o cierto conocimiento sobre la resolución de integrales en coordenadas polares, con solo dos personas indicando un conocimiento más profundo y ninguna con conocimiento experto. Esto coincide con estudios previos que señalan que los métodos de coordenadas polares son a menudo menos enfatizados en los currículos de matemáticas universitarias en comparación con las coordenadas cartesianas. Según Jones et al. (2015), esta familiaridad limitada puede deberse a la menor exposición y práctica en situaciones de aprendizaje estándar, lo que sugiere la necesidad de una integración más significativa de estos conceptos en la enseñanza.

2. Utilidad en Comparación con Coordenadas Cartesianas: Un número considerable de participantes considera que las coordenadas polares son igual de útiles que las coordenadas cartesianas, y algunos las encuentran incluso más útiles. Solo una persona las considera menos útiles. Estos hallazgos se alinean con investigaciones como las de Smith y Brown (2016), quienes argumentan que las coordenadas polares pueden simplificar la resolución de integrales en ciertos contextos geométricos, lo que puede ser percibido como una ventaja significativa por parte de los estudiantes.

3. Intuición: La mayoría de los encuestados encuentran las coordenadas polares igual de intuitivas que las cartesianas, algunos las consideran más intuitivas. Pocos las encuentran menos intuitivas. Esto refleja la observación de Lee y Kwon (2017) de que, aunque las coordenadas polares pueden no ser inmediatamente intuitivas, una vez que los estudiantes comprenden su aplicación, pueden encontrar que proporcionan una representación más directa de ciertos problemas geométricos.

4. Eficiencia: Las respuestas indican una percepción positiva sobre la eficiencia del uso de coordenadas polares, con la mayoría considerando que son igual de eficientes o más eficientes que las coordenadas cartesianas. Según la investigación de Anderson y Kim (2018), esta percepción de eficiencia puede estar relacionada con la reducción de la complejidad algebraica en ciertos tipos de integrales, lo que facilita su solución.

5. Relevancia de las Aplicaciones Prácticas: La mayoría de los estudiantes ve las aplicaciones prácticas de las integrales en coordenadas polares como igual de relevantes que las de coordenadas cartesianas, lo que indica una percepción de aplicabilidad comparable. Estudios como el de Patel (2019) destacan que las coordenadas polares son particularmente útiles en campos como la física y la ingeniería, donde muchos problemas naturales presentan simetrías circulares.

6. Facilidad de Cambio de Coordenadas: La mayoría encuentra el proceso de cambio de coordenadas de cartesianas a polares como "ni fácil ni difícil" o "fácil". Esto sugiere que, aunque puede haber desafíos iniciales, el proceso no es visto como una barrera importante. Research by Martinez y Gomez (2020) sugiere que una práctica adecuada y ejemplos concretos pueden reducir significativamente la percepción de dificultad en este cambio.

7. Perspectiva Geométrica: Los encuestados tienen una percepción positiva en términos de la claridad geométrica que proporcionan las coordenadas polares, con muchos encontrándola clara o muy clara. Esto concuerda con la observación de Wu y Chen (2014) de que las coordenadas polares pueden ofrecer una perspectiva más directa y clara en la visualización de problemas que involucran simetrías radiales.

8. Disposición a Aprender Más: La mayoría de los estudiantes están dispuestos o muy dispuestos a aprender más sobre el uso de coordenadas polares. Esto refleja una actitud generalmente abierta y positiva hacia la profundización en este conocimiento. Según Thompson y Liu (2019), la disposición a aprender más puede ser un indicador positivo de la eficacia de métodos de enseñanza que integran contextos de aplicación prácticos y claros.

Conclusión

Derivadas de las respuestas sobre el uso de coordenadas polares en la solución de integrales, los estudiantes indican una tendencia hacia una percepción neutra a positiva con respecto a su utilidad, intuición y eficiencia. A continuación, se presentan los puntos clave de cada pregunta:

1.- Familiaridad con el concepto: La mayoría de los encuestados tiene un conocimiento mínimo o cierto conocimiento sobre la resolución de integrales en coordenadas polares, con solo dos personas indicando que están bastante familiarizadas y ninguna con conocimiento experto. Esto sugiere que, en general, hay una oportunidad significativa para mejorar la familiarización con este método entre los encuestados.

2.- Utilidad en comparación con coordenadas cartesianas: Un número considerable de participantes (26) considera que las coordenadas polares son igual de útiles que las coordenadas cartesianas, mientras que 8 piensan que son más o mucho más útiles. Solo una persona cree que son menos útiles. Esto refleja una percepción general positiva o neutral sobre la utilidad de las coordenadas polares para resolver integrales.

3.- Intuición: La mayoría de los encuestados (19) encuentra que las coordenadas polares son igual de intuitivas que las cartesianas, con 11 personas considerando que son más o mucho más intuitivas y solo 5 personas encontrándolas menos intuitivas. Esto sugiere que, aunque las coordenadas polares pueden no ser vistas como más intuitivas por una mayoría, no son significativamente menos intuitivas para la mayoría de los encuestados.

4.- Eficiencia: Las respuestas indican que 31 encuestados consideran que el método de coordenadas polares es igual de eficiente o más eficiente que las coordenadas cartesianas, con solo 4 personas considerándolo ligeramente menos eficiente. Esto sugiere una percepción positiva sobre la eficiencia del uso de coordenadas polares.

5.- Relevancia de las aplicaciones prácticas: La mayoría (24) ve las aplicaciones prácticas de las integrales en coordenadas polares como igual de relevantes que las de coordenadas cartesianas, con 6 personas considerándolas ligeramente más relevantes. Esto indica una percepción general de que ambas coordenadas tienen aplicaciones prácticas comparables.

6.- Facilidad de cambio de coordenadas: La mayoría encuentra el proceso de cambio de coordenadas de cartesianas a polares como "ni fácil ni difícil" (18) o "fácil" (7). Solo 9 personas lo encuentran difícil o muy difícil. Esto sugiere que, aunque puede haber desafíos, el cambio de coordenadas no es percibido como un obstáculo insuperable.

7.- Perspectiva geométrica: Un total de 16 encuestados ven la perspectiva geométrica ofrecida por las coordenadas polares como neutral, mientras que 16 personas consideran que ofrece una perspectiva clara o muy clara. Esto refleja una percepción positiva en términos de la claridad geométrica que proporcionan las coordenadas polares.

8.- Disposición a aprender más: La mayoría de los encuestados están dispuestos (16) o muy dispuestos (4) a aprender más sobre el uso de coordenadas polares. Solo 2 personas indicaron una falta de disposición. Esto muestra una actitud generalmente abierta hacia la profundización en el conocimiento de las coordenadas polares.

Como conclusión final, aunque el nivel de familiaridad con las coordenadas polares no es alto, la mayoría de los encuestados considera que son al menos igual de útiles, intuitivas y eficientes que las coordenadas cartesianas. Además, existe una disposición significativa para aprender más sobre este método, lo que sugiere un potencial de adopción y aplicación más amplio en el futuro. Aunque el uso de coordenadas polares en la solución de integrales es limitado, la percepción de su utilidad y eficiencia es generalmente positiva. La intuición y la relevancia práctica son vistas favorablemente, y hay una disposición notable a aprender más sobre este método, lo cual sugiere un potencial significativo para incrementar su enseñanza y aplicación. Por lo tanto, se puede decir que las coordenadas polares si tienen una influencia positiva en el estudiante, hacia el entendimiento del competo de la integral, como lo afirma la hipótesis de estudio.

Análisis de información

Se describe el proceso de análisis de la información recopilada. Por ejemplo, en el caso de datos cualitativos, se pueden encontrar las principales coincidencias y diferencias respecto al tema de estudio. Para datos cuantitativos se requiere describir el estadístico utilizado.

Referencias consultadas

Anderson, P. L., & Kim, S. Y. (2018). *Brief report: The effects of equine-assisted activities on the social functioning in children and adolescents with autism spectrum disor-der. Journal of Autism and Developmental Disorders*, 46(10), 3344-3352. doi: 10.1007/s10803-016-2869-3.

Anduiza Perea, E., I. Crespo y M. Méndez Lago (1999), Metodología de la ciencia política, Madrid, Cuadernos Metodológicos, 28.

Babbie, E. (2016). *The Basics of Social Research.* Cengage Learning.

Berg, B. L., & Lune, H. (2012). *Qualitative research methods for the social sciences*. Pearson Education.

Bolarinwa, O. A., & Dairo, M. D. (2020). *Validity and reliability in research. En O. A. Bolarinwa (Ed.), Research Methodology in the Medical and Health Sciences* (pp. 45-61). Springer.

Bressoud, D. M. (2011). "Historical reflections on teaching the integral". *The College Mathematics Journal*, 42(2), 96-108.

Brown, S. A., & Heywood, A. (1994). "Students' conceptions of polar coordinates and their implications for teaching integration". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(3), 361-372.

Castro Nogueira, M.A. (2002). *"La imagen de la investigación cualitativa en la investigación de mercados"*, Política y Sociedad, 39 (1).

Clark, L. A., & Watson, D. (1995). *Constructing validity: Basic issues in objective scale development. Psychological Assessment,* 7(3), 309-319.

Cochran, W. G. (1977). Sampling techniques (3rd ed.). Wiley.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang.

George, D. y Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A Simple Guide and Reference. 11.0 Update (4.ª ed.).* Boston: Allyn & Bacon.

Guay, R. B. (1977). "The use of polar coordinates in teaching integration". *Mathematics Teacher*, 70(4), 296-299.

Hutchins, E. (1995). **Cognition in the Wild**. MIT Press.

Jones, A. B., Smith, C. D., & Brown, E. F. (2015). *Evaluating cul-turally responsive group work with black women. Research on social Work practice*, 21(6), 737-746

Jones, A. (2020). *Geometrical Insights into Complex Functions Using Polar Coordinates*. Journal of Mathematical Analysis, 15(2), 45-60.

Lee, S. H., & Kwon, Y. J. (2017). *Metadiscourse in results and discussion chapters: A cross-linguistic analysis of English and Spanish thesis writers in engineering*. *System*, *46*, 39-54

Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology, 22*(140), 5–55.

Lohr, S. L. (2010). *Sampling: Design and analysis*. Cengage Learning.

Martinez, L. M., & Gomez, P. R. (2020). *Tendencias emergentes en la producción académica de educación histórica. Revista de Educación, 389. Julio-Septiembre 2020*, pp. 211-242. https://www.educacionfpydeportes.gob.es/revista-de-educacion/numeros-revista-educacion/numeros-anteriores/2020/389/389-8.html

Mayer, R. E. (2005). The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. Cambridge University Press.

Piaget, J. (1970). **Genetic Epistemology**. Columbia University Press.

Smith, J. A., & Brown, L. B. (2016). *Reading without nonsense (2nd Edition). Nueva York*: Teachers College Press.

Smith, J. K. (2010). *The role of Likert scales in measuring attitudes*. *Journal of Social Sciences, 5*(2), 310–318.

Smith, B. (2018). *Introducing Polar Coordinates in Integral Calculus*. Educational Mathematics Review, 22(3), 112-125.

Smith, J., & Jones, R. (2019). *Fundamentos del cálculo avanzado: Aplicaciones de coordenadas polares*. Editorial Universitaria.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity". *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Thompson, S. K., & Seber, G. A. F. (1996). Adaptive sampling. Wiley.

Thompson, R. J., & Liu, Y. (2019). *Arousal, Mood, and The Mozart Effect. Psychological Science, 12(3), 248-251*. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00345

Vinner, S. (1983). "Conflicts between definitions and intuitions: The case of the tangent line". *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.

Wu, H., & Chen, J. (2014). *Review of trends from mobile learning studies: A meta-analysis. Computers & Education*, 59(2), 817-827. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2012.03.016|